

Ex

مسألة رياضية 12

Ex

Find Laurents

of the regions.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \quad \text{on the regions:}$$

$$a) 0 < |z| < 1 \quad c) |z| > 2$$

$$b) 0 \leq |z-1| < 1$$

Sol

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} \quad \rightarrow A=1, B=1$$

$$\therefore f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots \quad |u| < 1$$

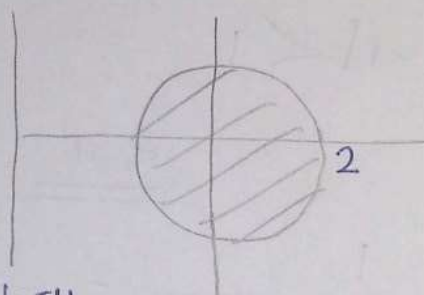
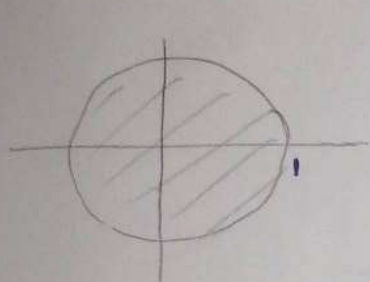
$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots \quad |u| < 1$$

$$a) \quad 0 < |z| < 1$$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{z}{z}} \right)$$

$$|z| < 1 \quad \text{and} \quad \left| \frac{z}{z} \right| < 1$$

$$|z| < 1 \quad \text{and} \quad |z| < 2$$



التقاطع

The region $0 < |z| < 1$

$$f(z) = \left[1 + z + z^2 + z^3 + \dots \right] - \frac{1}{z} \left[1 + \frac{z}{z} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots \right]$$

$$b) \quad 0 < |z-1| < 1$$

مع تجهيز المسألة نجعل بدلاً من كل $z \leftarrow z-1$ قبل البدء.
وإذ اتواجد قوس داخله $(z-1)$ يترك كما هو.

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)-1}$$

محاولة تجهيزها ← جاهزة ←

$$= \frac{-1}{z-1} - \frac{1}{1-(z-1)}$$

مُشرط القلا

$$0 \leq |z-1| < 1$$

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} - [1 + (z-1) + (z-1)^2 + (z-1)^3 - \dots]$$

c) $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-2}$$

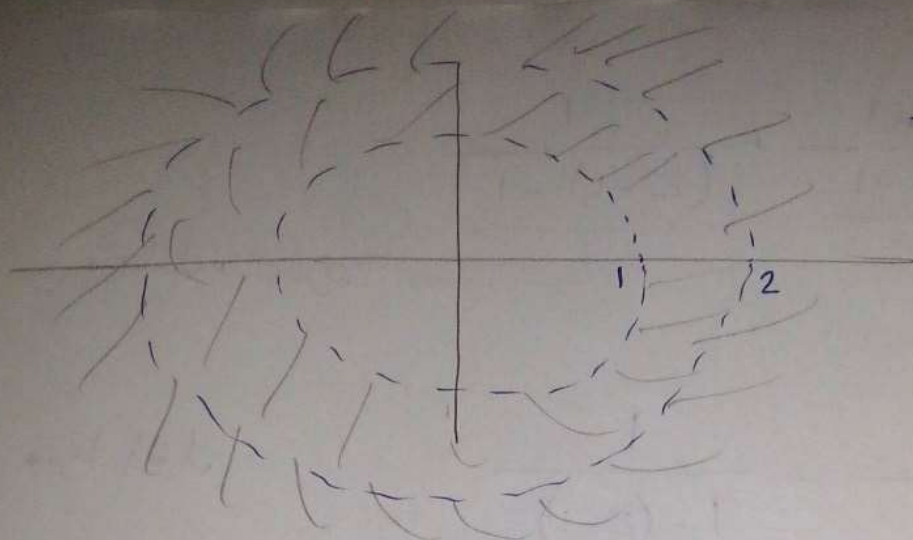
$$= \frac{-1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{z}} \right) + \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{z}} \right)$$

هذه المقاييس أكبر منه برقم فأخذ القوس مشترك .

$$\left| \frac{1}{z} \right| < 1 \Rightarrow 1 < |z|$$

$$\left| \frac{2}{z} \right| < 1 \Rightarrow 2 < |z|$$

التقاطع



The region is $|z| > 2$

$$f(z) = \frac{-1}{z} \left[1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots \right] + \frac{1}{z} \left[1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots \right]$$

مع إذا كان الخطوط $b < |z| < a$ في التجهيز

١- القوس الذي به b فأخذ منه ال z مشترك .

٢- " " " a فأخذ منه ال a مشترك .

zeros and singularity of $f(z)$

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

مع أوصاف الدالة هي قيم z التي تجعل البسط = صفر ولا تجعل

المقام = صفر .

→ رتبة الأقطار ~~في~~ أعلى أس لقوس داخله $(z-a)$ يمكن
أخذ مشترك من البسط حيث a هي أحد أقطار الدالة.

→ Singularity :- هي جميع قيم z التي تجعل الدالة ∞
أي تجعل المقام صفر.

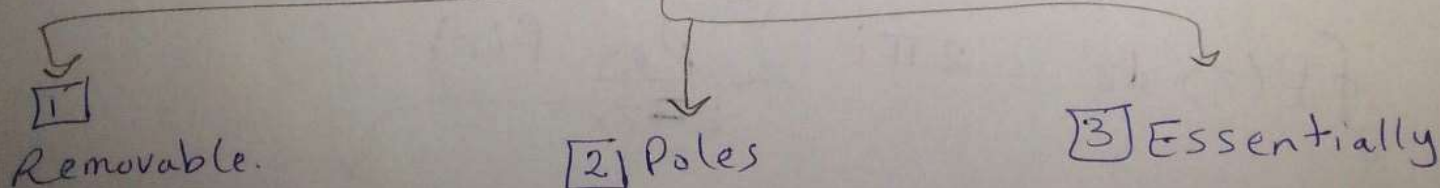
→ نلاحظ أنه موزوع أن تأخذ الدالة ∞ له ثلاثة احتمالات:

أولاً :- أنه ~~الدالة~~ الدالة عند القيمة صفر للمقام ~~ولكن~~ لا تجعل
الدالة ما لانهاية وهذا يستوجب أن يكون صفر المقام يجعل
البسط صفر.

ثانياً :- أن يكون عند الفلك عدد قليل من المفكوك له
أسس سالبة (جزء قليل في المفكوك يعطى ∞ والباقي لا يعطى)

ثالثاً :- أن يكون عند الفلك عدد لانهاية من الحدود ذات أسس
سالبة.

Type of singularity



[1] Removable

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

[1]

[2] هو المقام يجعل البسط هو لذلك يكون

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \infty$$

حيث z_0 هي قيمة z التي تجعل المقام هو .

$$\rightarrow \oint_C f(z) dz = 0 \Rightarrow \text{لا تفادى على أسس سالبة}$$

[2] Poles

له جورتان إما قوس $(z - z_0)$ في المقام أو قوس $(z - z_0)^{n+1}$ في المقام.

$$[1] f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)} \quad \text{"simple pole"}$$

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-1}$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{z \rightarrow z_0} \text{Res } f(z)$$

Residual

[6] Lec 14

$$\boxed{2} \quad f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$
"pole of order $n+1$ "

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^n}{dz^n} (z-z_0)^{n+1} f(z)$$

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{z=z_0} \text{Res } f(z)$$

الحدود التي أسسها
 سالبة عددها
 محدود.

3] Essentially

دوال تأخذ ما عند z_0 وعند فكيها عدد الحدود التي بها
 أسس سالبة لانها في.

مثل $\leftarrow \cosh\left(\frac{1}{z-a}\right), e^{\frac{1}{z}}, \cos \frac{1}{z}, \sin \frac{1}{z}$

لا بد من الفك بـ Laurents واستخدام

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

Example

Evaluate

$$\boxed{1} \quad \oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z} dz$$

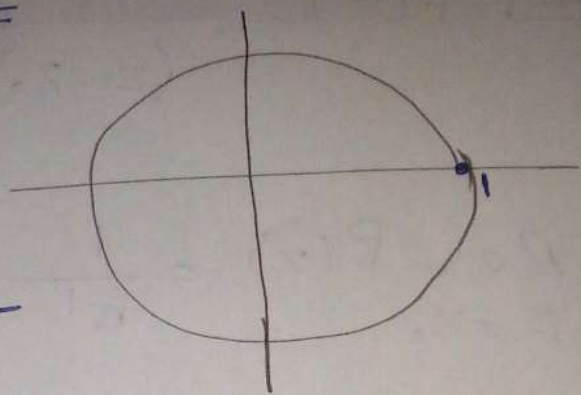
$$\boxed{2} \quad \oint_{|z|=3} \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-2)^2} dz$$

$$\boxed{3} \quad \oint_{|z|=2} z^2 \frac{1}{z-1} dz$$

$$\boxed{4} \quad \oint_{|z|=1} \frac{\sinh \frac{1}{z}}{z-5} dz$$

الحل

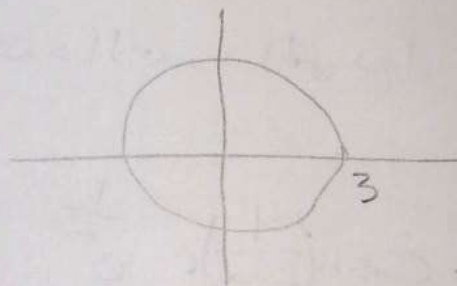
$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$



أولنا المقام عند $z=0$ تقع
داخل المنطقة، صفر المقام يجعل
البسط = صفر.

$$\therefore \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \neq \infty \Rightarrow I = 0$$

$$(2) f(z) = \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-2)^2}$$



أولنا المقام عند

$z=1 \rightarrow$ is simple pole

$z=2 \rightarrow$ is pole of order 2.

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-2)^2} = \boxed{2}$$

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} (z-2)^2 \frac{z^2 + 1}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z-1)(2z) - (z^2+1)(1)}{(z-1)^2} = \frac{4-5}{1} = -1$$

$$\oint_{|z|=3} \frac{z^2+1}{(z-1)(z-2)^2} dz = 2\pi i \sum \text{Res } f(z)$$

$$= 2\pi i [2 + (-1)]$$

$$= 2\pi i$$

عند ما ترى دالة مثلثية أو أسية أو زائدية الزائدية فيها معجدها لازم نفل
القوس (laurents) تجعل القيمة التي تجعل الدالة هي نقطة الفلك.

$$[3] f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z-1}}$$

$z=1$ is singular point of $f(z)$

$$e^{\infty} \rightarrow \infty$$

$$e^{-\infty} \rightarrow 0$$

نفل الدالة بدلالة قوى $(z-1)$

لأن هذه النقطة التي تجعل الدالة هي

$$e^{\text{أي حاجة}} = 1 + \frac{(\text{أي حاجة})}{1!} + \frac{(\text{أي حاجة})^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{1}{z-1} = 1 + \frac{1}{1!} \left(\frac{1}{z-1} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z-1} \right)^2 + \dots$$

$$z^2 = [(z-1) + 1]^2 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1$$

$$z^2 e^{\frac{1}{z-1}} = [(z-1)^2 + 2(z-1) + 1] \left[1 + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \dots \right]$$

... -1 = معامل القوس الذي أسه $\rightarrow a_1$

$$a_1 = \left[1 + \frac{2}{2!} + \frac{1}{3!} \right] = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$$

$$I = 2\pi i \left(\frac{13}{6} \right)$$

15 Lec 14